Lösungshinweise:

a) Gib eine Parameterdarstellung von E_1 an und eliminiere die Parameter. Die Lage von E_2 ist durch Q und $\overline{Q}$ beschrieben. Welcher Punkt liegt also auf E_2? Welchen Normalenvektor hat E_2? E_3 geht durch R. Welchen Normalenvektor hat E_3?

b) Von den Ebenen E_1 und E_2 kennt man Koordinatengleichungen. Deute diese beiden Gleichungen als Gleichungssystem und suche zwei spezielle Lösungen. Was hat man damit gefunden? Wie ergibt sich nun eine Gleichung von s? Wie erhält man am schnellsten den Schnittwinkel zweier Ebenen, wenn die Gleichungen in Koordinatenform gegeben sind?

c) Beachte die besondere Lage von E_2 und E_3! Skizziere die Lage von E_2, E_3, R und $\overline{R}$. Wie ergibt sich also der Punkt $\overline{R}$?

d) Skizziere die Lage von E_1, E_2, s, g_1, g_2 und A. Berechne die Koordinaten von A. Wie steht der Richtungsvektor von g_1 bezüglich des Richtungsvektors von s und des Normalenvektors von E_1? Führe entsprechende Überlegungen durch für den Richtungsvektor von g_2. Beachte zur Ermittlung des Schnittwinkels zwischen g_1 und g_2 die besondere Lage dieser Geraden.

Lösung:

a) **Koordinatengleichung von E_1**

Da drei Punkte der Ebene gegeben sind, ergibt sich sofort eine Parametergleichung von E_1: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-1\\-3\\4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\-5\\9\end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$.

Durch Elimination von r und s ergibt sich eine Koordinatengleichung:
E_1: $x_1-3x_2-2x_3+8=0$.

Koordinatengleichung von E_2

M sei Mitte von $Q\overline{Q}$: $M(3|3|1)$;

$\vec{n}$ sei Normalenvektor von E_2: $\vec{n}=\overrightarrow{Q\overline{Q}}=\begin{pmatrix}-4\\-2\\-6\end{pmatrix}$.

Damit ergibt sich als Normalenform von E_2:

$\begin{pmatrix}-4\\-2\\-6\end{pmatrix}\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}\right]=0$; hieraus folgt eine Koordinatengleichung:

E_2: $2x_1+x_2+3x_3-12=0$.

Koordinatengleichung von E_3

$R(1|1|-1)$ ist ein Punkt und $\vec{n}=\begin{pmatrix}-4\\-2\\-6\end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von E_3.

Damit gilt: $\begin{pmatrix}-4\\-2\\-6\end{pmatrix}\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right]=0$ oder E_3: $2x_1+x_2+3x_3=0$.

b) **Gleichung der Schnittgeraden s**

Da von den Ebenen E_1 und E_2 schon Koordinatengleichungen ermittelt wurden, erhält man eine Gleichung der Schnittgeraden s am schnellsten, wenn man 2 Punkte von s kennt. Hierzu sucht man Lösungen des von beiden Gleichungen gebildeten Gleichungssystems. Multipliziert man die Gleichung von E_1 mit 2 und substrahiert diese von der Gleichung von E_2, so erhält man $x_2+x_3-4=0$. Die Wahl von $x_2=1$, $x_3=3$ führt auf $P_1(1|1|3)$ und die Wahl von $x_2=2$, $x_3=2$ führt auf $P_2(2|2|2)$.

Damit ist $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$; eine Gleichung der Schnittgeraden s.

Schnittwinkel zwischen E_1 und E_2

Schnittwinkel α zwischen den Ebenen über Schnittwinkel der Normalen:

$$\cos\alpha=\left|\frac{\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}}\right|=\left|\frac{-7}{14}\right|=\frac{1}{2};\ \alpha=60^\circ.$$

c) **Abstand der Ebenen E_2 und E_3**

Die Ebenen E_2 und E_3 sind parallel. Den Abstand dieser Ebenen erhält man also, indem man den Abstand eines Punktes einer Ebene von der anderen berechnet. Da die Ebene E_3 durch O geht, bietet sich an, den Abstand des Punktes O von E_2 zu berechnen.

HNF von E_2: $\frac{1}{\sqrt{14}}(2x_1+x_2+3x_3)-\frac{12}{\sqrt{14}}=0$.

Abstand d des Punktes O von E_2: $\left|-\frac{12}{\sqrt{14}}\right|=\frac{6}{7}\sqrt{14}$.

Koordinaten von $\overline{R}$

Der Punkt $\overline{R}$ ergibt sich als Durchstoßpunkt des Lotes durch R zu E_3.
Gerade g durch R senkrecht zu E_3:

g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$.

G

87/1 Lösung

Lösungshinweise:

a) Wie erhält man eine Parametergleichung einer Ebene, wenn drei Punkte dieser Ebene gegeben sind? Wie erhält man hieraus eine Koordinatengleichung? Zur Ermittlung der Koordinaten des Schnittpunktes S schneide g mit E. Wie berechnet man den Schnittwinkel zwischen einer Geraden und einer Ebene?

b) Fertige eine Lageskizze an. Stelle eine Gleichung der Lotgeraden h zu E durch U auf und ermittle die Koordinaten des Lotfußpunktes. Wie erhält man hieraus die Koordinaten des Spiegelpunktes U'?

c) Welche Darstellungsform einer Ebene ist am günstigsten, wenn der Abstand eines Punktes von dieser Ebene gesucht ist? Der Abstand eines Punktes T von einer Geraden g kann auf verschiedene Weisen bestimmt werden. Zum Beispiel kann man eine Hilfsebene senkrecht zu g durch T legen, die Koordinaten des Durchstoßpunktes berechnen und den Abstand als Länge des Vektors Punkt–Durchstoßpunkt ermitteln. Oder aber man betrachtet ein Lot zu g durch T und berechnet die Koordinaten des Lotfußpunktes.

d) In Teilaufgabe a) wurde eine Koordinatengleichung von E ermittelt. Wie erhält man hieraus die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen? Welche Fläche der Pyramide bietet sich bei der Berechnung des Volumens als Grundfläche an? Zur Ermittlung des Flächeninhalts des Dreiecks $S_1S_2S_3$ kann man das soeben ermittelte Volumen der Pyramide verwenden, wenn man noch den Abstand dieses Dreiecks vom Ursprung kennt. Wie groß ist dieser Abstand (vgl. Teilaufgabe c))?

Lösung:

a) **Koordinatengleichung von E**

Parameterdarstellung von E:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\3\\4\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix};\quad r, s \in \mathbb{R}.$$

Eliminiert man aus dieser Gleichung die Parameter r und s, so ergibt sich als Koordinatengleichung:

E: $2x_1 - 2x_2 + x_3 - 6 = 0$.

Koordinaten von S

$g \cap E = \{S\}$: $2(4-2t) - 2(5+t) + (6+t) - 6 = 0$

Hieraus folgt $t = -\frac{2}{5}$ und somit $S\left(\frac{24}{5}\middle|\frac{23}{5}\middle|\frac{28}{5}\right)$.

86/1 Lösung

$g \cap E_2 = \{\overline{R}\}$: $2(1+2r) + (1+r) + 3(-1+3r) - 12 = 0$.

Daraus folgt $r = \frac{6}{7}$ und somit $\overline{R}\left(\frac{19}{7}\middle|\frac{13}{7}\middle|\frac{11}{7}\right)$.

d) **Gleichung von g_1**

$A \in s$ liefert $a_2 = 3$ und $a_3 = 1$, also $A(3|3|1)$.

Der Richtungsvektor $\vec{v}_1$ von g_1 steht senkrecht zum Richtungsvektor von s und dem Normalenvektor von E_1:

$$\vec{v}_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = 0 \text{ und } \vec{v}_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix} = 0.$$

Aus $v_{11} + v_{12} - v_{13} = 0$ und $v_{11} - 3v_{12} - 2v_{13} = 0$ folgt z.B. $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}5\\-1\\4\end{pmatrix}$.

Damit gilt: g_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}5\\-1\\4\end{pmatrix};\quad r \in \mathbb{R}$.

Gleichung von g_2

Der Richtungsvektor $\vec{v}_2$ von g_2 steht senkrecht zum Richtungsvektor von s und dem Normalenvektor von E_2:

$$\vec{v}_2 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = 0 \text{ und } \vec{v}_2 \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = 0.$$

Aus $v_{21} + v_{22} - v_{23} = 0$ und $2v_{21} + v_{22} + 3v_{23} = 0$ folgt z.B. $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}-4\\5\\1\end{pmatrix}$.

Damit gilt: g_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-4\\5\\1\end{pmatrix};\quad t \in \mathbb{R}$.

Schnittwinkel zwischen g_1 und g_2

g_1 liegt in E_1, g_2 liegt in E_2; beide Geraden schneiden sich in $A \in s$. Sowohl g_1 als auch g_2 stehen senkrecht auf s. Damit gilt für den Schnittwinkel β zwischen g_1 und g_2: $\beta = \alpha = 60°$.

Ermittelt man den Schnittwinkel mit Hilfe des Skalarproduktes der Richtungsvektoren von g_1 und g_2, so folgt ebenfalls $\beta = 60°$.

Schnittwinkel zwischen g und E

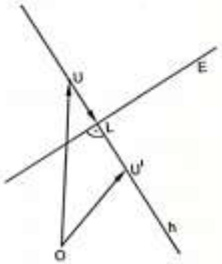
Es bezeichne $\alpha \leqq 90°$ den Schnittwinkel zwischen der Geraden g und der Ebene E. Die Gerade g hat den Richtungsvektor

$\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und die Ebene E hat den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Damit gilt:

$$\sin\alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{6} \cdot 3} = \frac{5}{18}\sqrt{6}; \quad \alpha \approx 42{,}9°.$$

b) Koordinaten des Spiegelpunktes U'

Die Lotgerade h zu E durch U schneide E in L.



h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -9 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \ u \in \mathbb{R}$

$h \cap E = \{L\}$:

$2(-1+2u) - 2(-4-2u) + (-9+u) - 6 = 0$

Hieraus folgt $u = 1$ und somit $L(1|-6|-8)$.

Aus $\overrightarrow{OU'} = \overrightarrow{OU} + 2 \cdot \overrightarrow{UL} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -7 \end{pmatrix}$ folgt $U'(3|-8|-7)$.

c) Abstand des Punktes T von E

HNF von E: $\frac{1}{3}(2x_1 - 2x_2 + x_3 - 6) = 0$

Abstand d des Punktes $T(6|-6|9)$ von E:

$d = \left|\frac{1}{3}(2 \cdot 6 - 2 \cdot (-6) + 9 - 6\right| = 9.$

Abstand des Punktes T von g

1. Möglichkeit: Hilfsebene E_1 senkrecht zu g durch T.
Die Hilfsebene E_1 hat den Richtungsvektor von g als Normalenvektor und geht durch T:

$E_1: \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}\right] = 0$ bzw. $-2x_1 + x_2 + x_3 + 9 = 0.$

$g \cap E_1 = \{F\}: -2(4-2t) + (5+t) + (6+t) + 9 = 0$

G

Daraus folgt $t = -2$ und somit $F(8|3|4)$.
Der Abstand d_1 des Punktes T von g ist
$d_1 = |\overrightarrow{TF}| = \sqrt{4 + 81 + 25} = \sqrt{110}.$

2. Möglichkeit: Lotgerade zu g durch T.
Die Lotgerade zu g durch T schneide g in F.

$\overrightarrow{TF} = -\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aus $\left[\begin{pmatrix} -2 \\ 11 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ folgt $t = -2$.

Damit ergeben sich wie oben die Koordinaten von F und der Abstand des Punktes T von g.

d) Koordinaten der Schnittpunkte der Achsen mit E

Schnittpunkt S_1 mit der x_1-Achse: $x_2 = x_3 = 0$; $x_1 = 3$; $S_1(3|0|0)$.
Schnittpunkt S_2 mit der x_2-Achse: $x_1 = x_3 = 0$; $x_2 = -3$; $S_2(0|-3|0)$.
Schnittpunkt S_3 mit der x_3-Achse: $x_1 = x_2 = 0$; $x_3 = 6$; $S_3(0|0|6)$.

Volumen der Pyramide

$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{OS_1}| \cdot |\overrightarrow{OS_2}| \cdot |\overrightarrow{OS_3}| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 6 = 9$

Flächeninhalt des Dreiecks $S_1S_2S_3$

Das Dreieck $S_1S_2S_3$ hat den Flächeninhalt A. Die Ebene E hat vom Ursprung O den Abstand $d_2 = 2$ (vgl. Teilaufgabe c)). Damit gilt:

$V = \frac{1}{3} \cdot A \cdot d_2 = \frac{1}{3} \cdot A \cdot 2.$ Aus $\frac{1}{3} \cdot A \cdot 2 = 9$ folgt $A = \frac{27}{2}$.